Τυπολόγιο Μαθηματικών Β' Λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ

Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ λέγεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της εκτός του πρώτου όρου προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση πάντα του ίδιου αριθμού, δηλαδή:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$$

Γενικός όρος αριθμητικής προόδου

Ο γενικός (νιοστός) όρος αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Αριθμητικός μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

ο οποίος μπορεί να πάρει και τη μορφή:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[\,2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\,]$$

Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 \neq 0$ λέγεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της εκτός του πρώτου όρου προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό, δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda, \quad \lambda \neq 0$$

Γενικός όρος γεωμετρικής προόδου

Ο γενικός όρος γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$$

Γεωμετρικός μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνον αν ισχύει:

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δίνεται από τους τύπους:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}, \text{ αν } \lambda \neq 1 \quad \text{και} \quad S_\nu = \nu\alpha_1, \text{ αν } \lambda = 1$$

Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) για το λόγο της λ ισχύει $|\lambda| < 1$, τότε το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι:

$$S = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας θετικός αριθμός. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha^x$.

Η συνάρτηση αυτή στην περίπτωση που ισχύει $\alpha \neq 1$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό α.

Λογάριθμοι

Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha^x = \theta$ με $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση την ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση α και τη συμβολίζουμε $\log_\alpha\theta$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha\theta$$

Συνέπειες του ορισμού

- $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
- $\log_\alpha 1 = 0$ και $\log_\alpha \alpha = 1$

Ιδιότητες των λογάριθμων

Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ ισχύουν:

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$
- $\log_\alpha(\theta_1 : \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta, \ \kappa \in \mathbb{R}$

Ειδικά:

$$\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$$

Αλλαγή βάσης

Αν $0 < \alpha \neq 1$, $0 < \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

Άμεση συνέπεια:

$$\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \alpha = 1$$

Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός με $0 < \alpha \neq 1$. Τότε για κάθε $x > 0$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε θετικό αριθμό x τον αριθμό $\log_\alpha x$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \log_\alpha x.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

- $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
- $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
- $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$
- $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$
- $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ με $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0,\ \sigma\upsilon\nu\beta \neq 0,\ \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \neq 0$
- $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ με $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0,\ \sigma\upsilon\nu\beta \neq 0,\ \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \neq 0$
- $\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$ με $\eta\mu\alpha \neq 0,\ \eta\mu\beta \neq 0,\ \eta\mu(\alpha + \beta) \neq 0$
- $\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$ με $\eta\mu\alpha \neq 0,\ \eta\mu\beta \neq 0,\ \eta\mu(\alpha - \beta) \neq 0$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

- $ημ2α = 2ημασυνα$
- $συν2α = συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ημ^2α$
- $εφ2α = \dfrac{2εφα}{1 - εφ^2α}$ με $συνα \neq 0$ και $συν2α \neq 0$
- $σφ2α = \dfrac{σφ^2α - 1}{2σφα}$ με $ημα \neq 0$ και $ημ2α \neq 0$

- $ημ^2α = \dfrac{1 - συν2α}{2}$
- $συν^2α = \dfrac{1 + συν2α}{2}$
- $εφ^2α = \dfrac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$
- $σφ^2α = \dfrac{1 + συν2α}{1 - συν2α}$
- $ημ2α = \dfrac{2εφα}{1 + εφ^2α}$
- $συν2α = \dfrac{1 - εφ^2α}{1 + εφ^2α}$
- $ημ3α = 3ημα - 4ημ^3α$
- $συν3α = 4συν^3α - 3συνα$

Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων

- $2ημασυνβ = ημ(α + β) + ημ(α - β)$
- $2συνασυνβ = συν(α + β) + συν(α - β)$
- $2ημαημβ = συν(α - β) - συν(α + β)$
- $ημA + ημB = 2ημ\dfrac{A + B}{2}συν\dfrac{A - B}{2}$
- $ημA - ημB = 2ημ\dfrac{A - B}{2}συν\dfrac{A + B}{2}$
- $συνA + συνB = 2συν\dfrac{A + B}{2}συν\dfrac{A - B}{2}$
- $συνA - συνB = -2ημ\dfrac{A - B}{2}ημ\dfrac{A + B}{2} = 2ημ\dfrac{A + B}{2}ημ\dfrac{B - A}{2}$

Η συνάρτηση f με τύπο f(x) = αημx + βσυνx

Η συνάρτηση $f(x) = αημx + βσυνx$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$f(x) = ρημ(x + φ)$$

όπου: $ρ = \sqrt{α^2 + β^2}$ και $φ$ γωνία με: $συνφ = \dfrac{α}{ρ}$, $ημφ = \dfrac{β}{ρ}$

1. **Πεδίο ορισμού:** $A = \mathbb{R}$.
2. **Περιοδικότητα:** Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = 2π$.
3. **Ακρότατα:** Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή ίση με $|ρ|$ και ελάχιστη τιμή ίση με $-|ρ|$.
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ρημ(x + φ)$ προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = ρημx$ στον $x'x$ κατά $φ$ μονάδες δεξιά αν $φ < 0$ και αριστερά αν $φ > 0$.

Επίλυση τριγώνου

- Νόμος ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{α}{ημA} = \dfrac{β}{ημB} = \dfrac{γ}{ημΓ} = 2R$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Συνέπειες

$α = 2RημA$, $β = 2RημB$, $γ = 2RημΓ$

$ημA = \dfrac{α}{2R}$, $ημB = \dfrac{β}{2R}$, $ημΓ = \dfrac{γ}{2R}$

- Νόμος συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA \quad β^2 = α^2 + γ^2 - 2αγσυνB \quad γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ$$